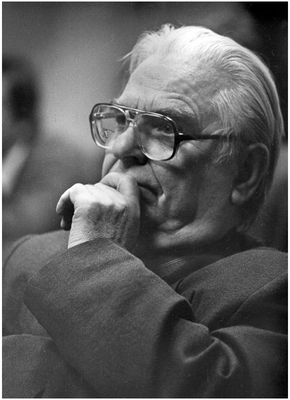
ИЗБРАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
Акад. РАН И.И. Еремина



Аннотация

- Приведен краткий обзор результатов И.И. Еремина, опубликованных в журнале «Доклады Академии Наук» в 1961-2005 гг.

Содержание

Чебышевская аппроксимация несовместной системы

- Пусть $L_j(x) = \sum_{ji} a_{ji} x_i \not\equiv 0$, $a_{ji}, x_i, b_j \in \mathbb{R}^n$. Задана система
$$L_j(x) - b_j \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1}$$
ранга $r > 0$.
- Зададимся значениями $\varepsilon_j \geqslant 0$ так, чтобы система
$$L_j(x) - b_j \leqslant \varepsilon_j \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{2}$$
оказалась совместной.
- Число
$$\varepsilon_0 = \inf \|\varepsilon\|_\infty = \inf_x \max_j \left[L_j(x) - b_j\right]_+$$
называется *дефектом системы* (1)

Чебышевская аппроксимация несовместной системы

Пусть $m = r + 1$

- Рассмотрим произвольный *характеристический определитель* Δ
- Через A_i обозначим алгебраическое дополнение элемента b_j
- Справедлив следующий критерий совместности системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ b_m \end{bmatrix}$$

Чебышевская аппроксимация несовместной системы

Пусть $m = r + 1$

- Рассмотрим произвольный *характеристический определитель* Δ
- Через A_i обозначим алгебраическое дополнение элемента b_j
- Справедлив следующий критерий совместности системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ b_m \end{bmatrix}$$

Чебышевская аппроксимация несовместной системы

Пусть $m = r + 1$

- Рассмотрим произвольный *характеристический определитель* Δ
- Через A_i обозначим алгебраическое дополнение элемента b_j
- Справедлив следующий критерий совместности системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ & \dots & & \\ & \dots & & b_j \\ & \dots & & \\ a_{(r+1)1} & \dots & a_{(r+1)r} & b_{r+1} \end{vmatrix}$$

Чебышевская аппроксимация несовместной системы

Пусть $m = r + 1$

- Рассмотрим произвольный *характеристический определитель* Δ
- Через A_i обозначим алгебраическое дополнение элемента b_j
- Справедлив следующий критерий совместности системы

Theorem 1

Система (1) *совместна тогда и только тогда, когда* $\Delta / \sum_{j=1}^{m} A_j \geqslant 0$ *В случае несовместности системы ее дефект* $\varepsilon_0 = -\Delta / \sum_{j=1}^{m} A_j$.

Чебышевская аппроксимация несовместной системы

Случай произвольного m.

Theorem 2 (Хелли)

Система (1) ранга $r > 0$ совместна тогда и только тогда, когда совместна произвольная ее подсистема из $r+1$ неравенства.

Чебышевская аппроксимация несовместной системы

Случай произвольного m.

Theorem 2 (Хелли)

Система (1) ранга $r > 0$ совместна тогда и только тогда, когда совместна произвольная ее подсистема из $r+1$ неравенства.

Theorem 3

Дефект системы (1) ранга $r > 0$ совпадает с максимальным дефектом ее подсистем ранга r, состоящих из $r+1$ неравенства.

Разрешающая последовательность

- Для системы линейных неравенств

$$L_j(x) - b_j \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

построен итерационный процесс, сходящийся к ее некоторому решению системы

$$L_j(x) - b_j \leqslant \varepsilon_0 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

(*точке чебышевского приближения*), являющемуся решением системы (3) в случае ее совместности.

- Алгоритм строит *разрешающую* последовательность $\{s_k\}$ для системы (3), $s_k \to \tilde{x}$, где $\tilde{x}$ — некоторое решение системы (4).

Алгоритм проектирования

- В работах (Agmon, S. 1954) и (Motzkin T., Schoenberg I., 1954) предложен метод
$$s_{k+1} = s_k + \lambda(q_k - s_k), \quad \lambda \in (0,2), \tag{5}$$
где q_k — проекция точки s_k на гиперплоскость $L_{j(k)} = b_{j(k)}$ для $j(k) = \arg\max_j [L_j(s_k) - b_j]$
- К сожалению, в случае несовместности системы (3) алгоритм (5) зацикливается

Алгоритм проектирования

- В работах (Agmon, S. 1954) и (Motzkin T., Schoenberg I., 1954) предложен метод
$$s_{k+1} = s_k + \lambda(q_k - s_k), \quad \lambda \in (0, 2), \tag{5}$$
где q_k — проекция точки s_k на гиперплоскость $L_{j(k)} = b_{j(k)}$ для $j(k) = \arg\max_j \left[L_j(s_k) - b_j\right]$
- К сожалению, в случае несовместности системы (3) алгоритм (5) зацикливается

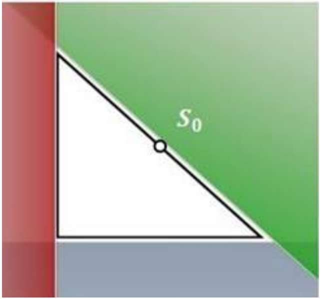
Алгоритм проектирования

- В работах (Agmon, S. 1954) и (Motzkin T., Schoenberg I., 1954) предложен метод

$$s_{k+1} = s_k + \lambda(q_k - s_k), \quad \lambda \in (0, 2), \tag{5}$$

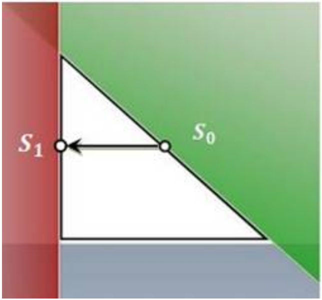
где q_k — проекция точки s_k на гиперплоскость $L_{j(k)} = b_{j(k)}$ для $j(k) = \arg\max_j [L_j(s_k) - b_j]$

- К сожалению, в случае несовместности системы (3) алгоритм (5) зацикливается



Алгоритм проектирования

- В работах (Agmon, S. 1954) и (Motzkin T., Schoenberg I., 1954) предложен метод
$$s_{k+1} = s_k + \lambda(q_k - s_k), \quad \lambda \in (0, 2), \tag{5}$$
где q_k — проекция точки s_k на гиперплоскость $L_{j(k)} = b_{j(k)}$ для $j(k) = \arg\max_j \left[L_j(s_k) - b_j\right]$
- К сожалению, в случае несовместности системы (3) алгоритм (5) зацикливается

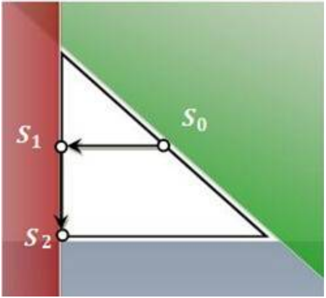


Алгоритм проектирования

- В работах (Agmon, S. 1954) и (Motzkin T., Schoenberg I., 1954) предложен метод

$$s_{k+1} = s_k + \lambda(q_k - s_k), \quad \lambda \in (0, 2), \tag{5}$$

где q_k — проекция точки s_k на гиперплоскость $L_{j(k)} = b_{j(k)}$ для $j(k) = \arg\max_j [L_j(s_k) - b_j]$
- К сожалению, в случае несовместности системы (3) алгоритм (5) зацикливается

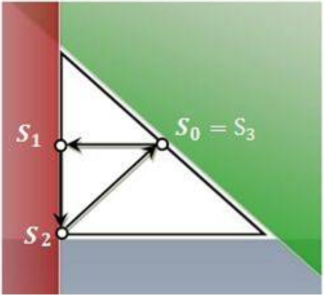


Алгоритм проектирования

- В работах (Agmon, S. 1954) и (Motzkin T., Schoenberg I., 1954) предложен метод

$$s_{k+1} = s_k + \lambda(q_k - s_k), \quad \lambda \in (0,2), \tag{5}$$

  где q_k — проекция точки s_k на гиперплоскость $L_{j(k)} = b_{j(k)}$ для $j(k) = \arg\max_j \left[L_j(s_k) - b_j\right]$
- К сожалению, в случае несовместности системы (3) алгоритм (5) зацикливается



Усовершенствованный алгоритм проектирования

$$s_{k+1} = s_k + \lambda_{k+1}(q_k - s_k) \tag{6}$$

Theorem 4

Последовательность $\{s_k\}$ *является разрешающей для сист.* (3) *при произвольном* s_0 *и выборе шаговых коэффициентов*

$$\lambda_k > 0,\ \lambda_k \to 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty.$$

Чебышевский центр

- *Чебышевским центром* ограниченного множества S в метрическом пространстве (X,ρ) называется точка c:

$$\sup_{s\in S}\rho(c,s)=\inf_{x\in X}\sup_{s\in S}\rho(x,s)$$

- По аналогии с процедурой (6) предложен итерационный алгоритм

$$p_{k+1}=p_k+\lambda_{k+1}(s_k-p_k),\ \ \lambda_k>0,\lambda_k\to 0,\sum_k\lambda_k=\infty$$

где $s_k=\arg\max_s\rho(s,p_k)$, сходящийся к чебышевскому центру конечного множества S при произвольном p_0.

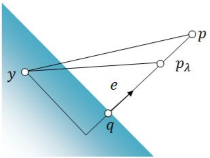
Фейровская последовательность

Последовательность $\{p_k\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *фейровской* относительно множества $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$ (M-фейеровской), если

$$|x - p_{k+1}| < |x - p_k|, \ (x \in M, p_k \notin M, k = 1, 2, \ldots).$$

Lemma 5 (Agmon, 1954)

Пусть $P = \{x \subset \mathbb{R}^n : (e, x - q) \leqslant 0\}$, $p \notin P$: $q = \mathrm{Pr}_P(p)$. *Тогда для произвольных* $p \in P$ *и* $\lambda \in (0, 2)$ *справедливо* $|y - p_\lambda| < |y - p|$, *где* $p_\lambda = p + \lambda(q - p)$



Релаксационные методы

Рассматривается совместная система

$$f_j(x) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{7}$$

в которой $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклые гладкие функции. M — непустое множество решений системы (7).

Theorem 6

Последовательность $\{p_k\}$, *определяемая соотношением*

$$p_{k+1} = p_k - \lambda_k \frac{\max_j f_j(p_k)}{|\nabla f_{j(k)}(p_k)|^2} \nabla f_{j(k)}(p_k), \;\; \lambda_k \in (\alpha, \beta) \subset (0, 2),$$

где $j(k) = \arg\max_j f_j(p_k)$, *сходится к некоторому* $\tilde{p} \in M$ *при произвольном* p_0.

Релаксационные методы

Рассматривается совместная система

$$f_j(x) \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{7}$$

в которой $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклые гладкие функции. M — непустое множество решений системы (7).

Theorem 7

Последовательность $\{p_k\}$, определяемая соотношением

$$p_{k+1} = p_k - \lambda_k \frac{\sum_{j \in S(k)} c_j f_j(p_k)}{|\sum_{j \in S(k)} c_j \nabla f_j(p_k)|^2} \sum_{j \in S(k)} c_j \nabla f_j(p_k),$$

$$\lambda_k \in (\alpha, \beta) \subset (0, 2),$$

где $S(k) = \{j : f_j(p_k) > 0\}$, также сходится к некоторой точке $\bar{p} \in M$ при произвольном p_0.

Фейеровский оператор

- Оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *фейровским* относительно непустого выпуклого замкнутого множества M, если для каждого $p \notin M$ и каждого $y \in M$ справедливо $|\varphi(p) - y| < |p - y|$ и $\varphi(p) = p$ при $p \in M$.
- Оператор φ называется c-фейеровским, если для каждого $p \in \mathbb{R}^n$ найдется $\tilde{y} = \tilde{y}(p) \in M$, такой что $\varphi^k(p) \to \tilde{y}$.
- Произвольный непрерывный фейеровский оператор является c-фейеровским. В частности, если $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие выпуклые функции и $M_j = \{x : f_j(x) \leqslant 0\}$, то операторы

$$\varphi_j : p \mapsto p - \begin{cases} -\lambda \frac{f_j(p)}{|\nabla f_j(p)|^2} \nabla f_j(p), & f_j(p) > 0, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

являются фейеровскими и непрерывными при произвольном $\lambda \in (0, 2)$, следовательно, $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_m$ является c-фейеровским относительно множества $M = \bigcap_j M_j$.

Оптимизация линейной функции на выпуклом множестве

- Исследуется задача $\tilde{m} = \min\{(c, x) \colon x \in M\}$,
  $M = \{x \colon d(x) \leqslant 0\}$ — выпукло и закмнуто,
  $\tilde{M} = \{x \in M \colon (c, x) = \tilde{m}\} \neq \varnothing$ и ограничено.
- Задавшись произвольным c-фейеровским (относительно M) оператором φ, рассмотрим рекуррентное соотношение

$$p_{k+1} = \varphi^{n_k}(p_k) - \lambda_k c, \;\; \lambda_k \in (0, \lambda_0),$$

где n_k выбирается из $d(\varphi^{n_k}(p_k)) \leqslant \lambda_k$.

Theorem 8

Пусть $\lambda_k \to 0$ *и* $\sum_k \lambda_k = \infty$, *тогда* $|p_k - \tilde{M}| \to 0$.

Содержательная постановка задачи

- Требуется найти решение задачи

$$\max\{(c,x)\colon x \in M_0 \cap M\}, \tag{8}$$

где M_0 и M — выпуклые замкнутые множества.

- По ряду причин задача (8) не может быть решена в представленном виде и аппроксимируется задачей

$$\sup\{(c,x) - \Phi(x, M_0, K), x \in M\}, \tag{9}$$

где Φ — подходящая функция, называемая штрафной, а K — (векторный) параметр.

Формальные постановки

Пусть функции f_j — выпуклые, а g_j — линейные.

Задача C:

$\max\{(c,x)\colon\ f_j(x) \leqslant 0\ (j \in J_1),\ \ g_j(x) = 0\ (j \in J_2)\}.$

Зададимся разбиением $S_0 \cup S$ множества $J = J_1 \cup J_2$

Задача C_1:

$\sup\{(c,x) - \Phi_1(x,K)\colon\ f_j(x) \leqslant 0, (j \in J_1 \cap S),\ \ g_j(x) = 0, (j \in J_2 \cap S)\}$,
где $\Phi_1(x,K) = \sum_{J_1 \cap S_0} K_j[f_j(x)]_+^2 + \sum_{J_2 \cap S_0} K_j g_j^2(x)$ и $K_j > 0$ при $j \in S_0$.

Задача C_2:

$\sup\{(c,x) - \Phi_2(x,K)\colon\ f_j(x) \leqslant 0, (j \in J_1 \cap S),\ \ g_j(x) = 0, (j \in J_2 \cap S)\}$,
где $\Phi_2(x,K) = \sum_{J_1 \cap S_0} K_j[f_j(x)]_+ + \sum_{J_2 \cap S_0} K_j|g_j(x)|$ и $K_j > 0$ при $j \in S_0$.

Формальные постановки

Пусть функции f_j — выпуклые, а g_j — линейные.

Задача C:

$\max\{(c,x)\colon\ f_j(x) \leqslant 0\ (j \in J_1),\ \ g_j(x) = 0\ (j \in J_2)\}.$

Зададимся разбиением $S_0 \cup S$ множества $J = J_1 \cup J_2$

Задача C_1:

$\sup\{(c,x) - \Phi_1(x,K)\colon\ f_j(x) \leqslant 0, (j \in J_1 \cap S),\ \ g_j(x) = 0, (j \in J_2 \cap S)\}$, где $\Phi_1(x,K) = \sum_{J_1 \cap S_0} K_j [f_j(x)]_+^2 + \sum_{J_2 \cap S_0} K_j g_j^2(x)$ и $K_j > 0$ при $j \in S_0$.

Задача C_2:

$\sup\{(c,x) - \Phi_2(x,K)\colon\ f_j(x) \leqslant 0, (j \in J_1 \cap S),\ \ g_j(x) = 0, (j \in J_2 \cap S)\}$, где $\Phi_2(x,K) = \sum_{J_1 \cap S_0} K_j [f_j(x)]_+ + \sum_{J_2 \cap S_0} K_j |g_j(x)|$ и $K_j > 0$ при $j \in S_0$.

Формальные постановки

Пусть функции f_j — выпуклые, а g_j — линейные.

Задача C:

$\max\{(c,x)\colon\ f_j(x) \leqslant 0\ (j \in J_1),\ \ g_j(x) = 0\ (j \in J_2)\}.$

Зададимся разбиением $S_0 \cup S$ множества $J = J_1 \cup J_2$

Задача C_1:

$\sup\{(c,x) - \Phi_1(x,K)\colon\ f_j(x) \leqslant 0, (j \in J_1 \cap S),\ \ g_j(x) = 0, (j \in J_2 \cap S)\}$, где $\Phi_1(x,K) = \sum_{J_1 \cap S_0} K_j [f_j(x)]_+^2 + \sum_{J_2 \cap S_0} K_j g_j^2(x)$ и $K_j > 0$ при $j \in S_0$.

Задача C_2:

$\sup\{(c,x) - \Phi_2(x,K)\colon\ f_j(x) \leqslant 0, (j \in J_1 \cap S),\ \ g_j(x) = 0, (j \in J_2 \cap S)\}$, где $\Phi_2(x,K) = \sum_{J_1 \cap S_0} K_j [f_j(x)]_+ + \sum_{J_2 \cap S_0} K_j |g_j(x)|$ и $K_j > 0$ при $j \in S_0$.

Теоремы о штрафных функциях

Обозначим через $\tilde{m}$, $\tilde{m}_1(K)$ и $\tilde{m}_2(K)$ — оптимальные значения, а $\tilde{x}$, $\tilde{x}_1(K)$ и $\tilde{x}_2(K)$ — оптимальные решения задач, $\tilde{u}_j$ — оптимальные двойственные оценки (для задачи C)

Theorem 9

1. Если оптимальное множество задачи C не пусто и ограничено, то аналогичным свойством обладает и оптимальное множество задачи C_1.
2. $\tilde{m} \leqslant \tilde{m}(K) \leqslant \tilde{m} + \sum_{S_0} \tilde{u}_j^2/(4K_j)$
3. $\max_j\{[f_j(\tilde{x}_1(K))]_+, |g_j(\tilde{x}_1(K))|\} \leqslant (\sqrt{2}+1)/(2K)\|\tilde{u}\|_2,$
где $K = \min_j K_j$
4. $|(c, \tilde{x}_1(K) - \tilde{m}| \leqslant |S_0|(\sqrt{2}+2)/(2K)\|\tilde{u}\|_2^2.$

Theorem 10

Если $K_j > |\tilde{u}_j|$, то $\tilde{m}_2(K) = \tilde{m}$ и оптимальные множества задач C и C_2 совпадают.

Теоремы о штрафных функциях

Обозначим через $\tilde{m}$, $\tilde{m}_1(K)$ и $\tilde{m}_2(K)$ — оптимальные значения, а $\tilde{x}$, $\tilde{x}_1(K)$ и $\tilde{x}_2(K)$ — оптимальные решения задач, $\tilde{u}_j$ — оптимальные двойственные оценки (для задачи C)

Theorem 9

1. Если оптимальное множество задачи C не пусто и ограничено, то аналогичным свойством обладает и оптимальное множество задачи C_1.
2. $\tilde{m} \leqslant \tilde{m}(K) \leqslant \tilde{m} + \sum_{S_0} \tilde{u}_j^2/(4K_j)$
3. $\max_j\{[f_j(\tilde{x}_1(K))]_+, |g_j(\tilde{x}_1(K))|\} \leqslant (\sqrt{2}+1)/(2K)\|\tilde{u}\|_2$,
где $K = \min_j K_j$
4. $|(c, \tilde{x}_1(K) - \tilde{m}| \leqslant |S_0|(\sqrt{2}+2)/(2K)\|\tilde{u}\|_2^2$.

Theorem 10

Если $K_j > |\tilde{u}_j|$, то $\tilde{m}_2(K) = \tilde{m}$ и оптимальные множества задач C и C_2 совпадают.

Постановки задач

- Пусть $x \in E_n$, $b \in E_m$, A — $m \times n$-матрица.
- $$L: \ \underline{\alpha} = \sup\{(c, x) \colon Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0\} \qquad (10)$$
  $$L^*: \ \overline{\alpha} = \inf\{(b, x) \colon A^T u \geqslant c, \ u \geqslant 0\} \qquad (11)$$
- Свойство *взаимности*: $(L^*)^* = L$
- По теореме двойственности, разрешимость L влечет разрешимость L^* и наоборот. В этом случае обе задачи называются *собственными*

Задача L называется *несобственной*

1-го рода	$M = \varnothing, M^* \neq \varnothing$
2-го рода	$M \neq \varnothing, M^* = \varnothing$
3-го рода	$M = \varnothing, M^* = \varnothing$

Постановки задач

- Пусть $x \in E_n$, $b \in E_m$, A — $m \times n$-матрица.
-
$$L: \ \underline{\alpha} = \sup\{(c,x) \colon Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0\} \tag{10}$$
$$L^*: \ \overline{\alpha} = \inf\{(b,x) \colon A^T u \geqslant c, \ u \geqslant 0\} \tag{11}$$
- Свойство *взаимности*: $(L^*)^* = L$
- По теореме двойственности, разрешимость L влечет разрешимость L^* и наоборот. В этом случае обе задачи называются *собственными*

Задача L называется *несобственной*

1-го рода	$M = \varnothing, M^* \neq \varnothing$
2-го рода	$M \neq \varnothing, M^* = \varnothing$
3-го рода	$M = \varnothing, M^* = \varnothing$

Схема двойственности

Зафиксируем разрез матрицы A на горизонтальные и вертикальные блоки

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{m_0} \end{bmatrix} = [B_0, \dots, B_{n_0}]$$

тем самым определив разбиение векторов b, c, x и u на подвекторы

$$b = [b^0, \dots, b^{m_0}]^T, u = [u^0, \dots, u^{m_0}]^T,$$

$$c = [c^0, \dots, c^{n_0}]^T, x = [x^0, \dots, x^{n_0}]^T$$

Схема двойствености

Введя параметры $R_j > 0, j = 1, \ldots, m_0$ и $r > 0, i = 1, \ldots, n_0$

$$C_0 : \max\{(c,x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|[A_j x - b^j]_+\|_{p(j)} : \|x^i\|_{q(j)} \leqslant r_i, i = 1, \ldots, n_0,$$

$$A_0 x \leqslant b^0, x \geqslant 0\} \quad (12)$$

$$C_0^* : \min\{(b,u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|[(c^i - B_i^T u]_+\|^*_{q(i)} : \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, j = 1, \ldots, m_0,$$

$$B_0^T u \geqslant c^0, u \geqslant 0\} \quad (13)$$

Теоремы двойствености

$$P = \{R = [R_1, \dots, R_{m_0}] \geqslant 0 \colon \text{задача } C_0^* \text{ имеет допустимые решения}\}$$

$$Q = \{r = [r_1, \dots, r_{n_0}] \geqslant 0 \colon \text{задача } C_0 \text{ имеет допустимые решения}\}$$

Theorem 11

Пусть $r \in int(Q)$ и задача C_0 разрешима, тогда задача C_0^* также разрешима и их оптимальные значения совпадают. Пусть $R \in int(P)$ и задача C_0^* разрешима, тогда разрешима и задача C_0 и их оптимальные значения также совпадают.

Теоремы двойствености

Если нормы $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ являются полиэдральными, условия $R \in int(P)$ и $r \in int(Q)$ могут быть ослаблены до $R \in P$ и $r \in Q$.

Theorem 12

Задачи

$$\max\{(c,x) - (R, [Ax-b]_+) : 0 \leqslant x \leqslant r\}$$

$$\min\{(b,u) - (r, [A^T u - c]_+) : 0 \leqslant u \leqslant R\}$$

разрешимы при произвольных $R > 0$ *и* $r > 0$ *и их оптимальные значения совпадают.*

Постановка задачи

Под задачей последовательного программирования (лексикографической оптимизации) на допустимом множестве M по упорядоченной системе критериев $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_0$ понимается заключительная из списка задач

$$\max\{f_m(x) \colon x \in M_m\}$$

$$\max\{f_{m-1}(x) \colon x \in M_{m_1}\}$$

$$\ldots$$

$$\max\{f_0(x) \colon x \in M_0\},$$

где $M_m = M$ и $M_{k-1} = \tilde{M}_k$

Двойственность

$$L_p : \max_p \left\{ \begin{bmatrix} C^T x \\ (c_0, x) \end{bmatrix} : Ax \leqslant b_0 + Br, x \geqslant 0 \right\}$$

$$L_q : \min_q \left\{ \begin{bmatrix} B^T u \\ (b_0, u) \end{bmatrix} : A^T u \geqslant c_0 + CR, u \geqslant 0 \right\}$$

Lemma 13

Для заданных $r \geqslant 0$ *и* $R \geqslant 0$*, обеспечивающих совместность ограничений в задачах* L_p *и* L_q*, существует непустая область значений* $\bar{r} \geqslant 0$ *и* $\bar{R} \geqslant 0$*, таких, что для скаляризованных с их помощью задач*

$$L(\bar{R}) : \max\{(c_0, x) + (C\bar{R}, x) \colon Ax \leqslant b_0 + Br, x \geqslant 0\}$$

$$L(\bar{r}) : \min\{(b_0, u) + (B\bar{r}, u) \colon A^T u \leqslant c_0 + CR, u \geqslant 0\}$$

Выполняются соотношения $Arg(L_p) = Arg(L(\bar{R}) \neq \varnothing$ *и* $Arg(L_q) = Arg(L(\bar{r}) \neq \varnothing$*. Выбор* $\bar{r}$ *и* $\bar{R}$ *может быть осуществлен независимо от* r *и* R*.*

Двойственность

Theorem 14

Пусть задачи

$$\max\{(c_i, x)\colon Ax \leqslant b_j, x \geqslant 0\}, i = 0, \dots, k, j = 0, \dots, l$$

разрешимы. Существует непустая область конструктивно определяемых значений $r \geqslant 0$ *и* $R \geqslant 0$ *таких, что* $Arg(L_p) = Arg(L(\bar{R} = R)) \neq \varnothing$ *и* $Arg(L_q) = Arg(L(\bar{r} = r)) \neq \varnothing$

Литература I

Еремин И.И.
Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп
Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 2. С. 223–224.

Еремин И.И.
О группах с конечными классами сопряженных подгрупп с заданным свойством
Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 4. С. 772–773.

Еремин И.И.
О несовместных системах линейных неравенств
Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, № 6. С. 1280–1283.

Еремин И.И.
Итеративный метод для чебышевских приближений несовместных систем линейных неравенств
Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1254–1256.

Литература II

Еремин И.И.
Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями в левых частях
Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 5. С. 994–996.

Еремин И.И., Мазуров Вл.Д.
Итеративный метод решения задачи выпуклого программирования
Докл. АН СССР. 1966. Т. 170, № 1. С. 57–60 (совм. с Вл. Д. Мазуровым).

Еремин И.И.
Метод штрафов в выпуклом программировании
Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.

Еремин И.И.
Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования
Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.

Литература III

Еремин И.И.
Симметричная двойственность для задач последовательного линейного программирования
Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 5. С. 1045–1048.

Еремин И.И.
Парето-последовательная задача линейной оптимизации и двойственность
Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 4. С. 141–143.

Еремин И.И.
К методу штрафов в математическом программировании
Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 4. С. 459–461.

Еремин И.И.
Сигма-кусочные функции и задачи дизъюнктивного программирования
Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 5. С. 538–540.

Литература IV

Еремин И.И.
Синтез фейеровских отображений с несовпадающими пространствами их образов
Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 1. С. 11–13.

Еремин И.И.
Идентификация штрафных констант в методах точных штрафных функций
Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 6. С. 737–739.